ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

I

a. $A_0, A_1, \ldots, A_n$ étant des matrices carrées d'ordre 2, à coefficients complexes, on associe à tout $s \in \mathbb{C}$, la matrice :

$$Q(s) = s^n A_0 + s^{n-1} A_1 + \ldots + A_n$$

Exprimer les coefficients $q_{ij}(s)$ de $Q(s)$ en fonction de s et des coefficients $a^k{}_{ij}$ des matrices A_k. A quelle condition doivent satisfaire ces matrices pour que $Q(s) = 0$ quel que soit s ?

b. A étant une matrice carrée d'ordre 2 de coefficients $a_{ij} \in \mathbb{C}$, montrer que, dans l'hypothèse où A est inversible, il existe une matrice A^* unique vérifiant l'égalité $AA^* = \det A.I.$ (où det A désigne le déterminant de A et I la matrice unité).

Donner les expressions des coefficients $a^*{}_{ij}$ de A^* en fonction de ceux de A. Montrer que la matrice A^* ainsi calculée satisfait à l'égalité précédente même si A n'est pas inversible.

c. Soit $P(s) = s^2 + \alpha s + \beta$ le polynôme caractéristique de A. Vérifier que $(sI - A)^* = sI - A^*$. En calculant deux expressions différentes du produit $(sI - A)\ (sI - A)^*$ et en utilisant les résultats du I.*a.* démontrer que $A^2 + \alpha A + \beta I = 0$.

d. A toute matrice colonne $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$, on associe les matrices :

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = Au \qquad \text{et} \qquad w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = Av.$$

Donner la valeur de la somme $w + \alpha v + \beta u$.

. . . / . . .

II

On suppose que, dans l'espace vectoriel C^∞ des fonctions réelles indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$, il existe deux fonctions y_1 et y_2 vérifiant les équations différentielles :

(E_1) $\qquad y''_1 = -8y_1 + 4y_2$

(E_2) $\qquad y''_2 = 4y_1 - 4y_2$

a. Appliquant les résultats de la partie I à la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} -8 & 4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \text{ et la matrice colonne } u = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix},$$

démontrer que y_1 et y_2 sont deux solutions sur $\mathbb{R}$ d'une équation différentielle de la forme :

$$y^{(4)} + \alpha y'' + \beta y = 0,$$

où α et β sont des constantes dont on donnera les valeurs.

b. Existe-t-il des valeurs de la constante réelle λ telles que, quels que soient K_1 et K_2 donnés, la fonction :

$$y : x \to K_1 \cos \lambda x + K_2 \sin \lambda x$$

soit solution de l'équation différentielle :

(E) $\qquad y^{(4)} + 12y'' + 16y = 0$?

c. u_1, u_2, u_3, u_4 sont les éléments de l'espace vectoriel C^∞ définis par :

$$u_1(x) = \cos \omega x \; ; \quad u_2(x) = \sin \omega x \; ; \quad u_3(x) = \cos \omega' x \; ;$$
$$u_4(x) = \sin \omega' x, \quad \text{où} \quad \omega = \sqrt{5} + 1 \quad \text{et} \quad \omega' = \sqrt{5} - 1.$$

Calculer le déterminant :

$$\Delta = \begin{bmatrix} u_1(0), & u_2(0), & u_3(0), & u_4(0) \\ u'_1(0), & u'_2(0), & u'_3(0), & u'_4(0) \\ u''_1(0), & u''_2(0), & u''_3(0), & u''_4(0) \\ u'''_1(0), & u'''_2(0), & u'''_3(0), & u'''_4(0) \end{bmatrix}$$

Démontrer que :

$$\sum_{i=1}^{4} \lambda_i u_i(x) = 0 \quad \text{pour tout } x \text{ implique que}$$

$$\forall n = 0, 1, 2, 3 \quad \sum_{i=1}^{4} \lambda_i u_i^{(n)}(0) = 0.$$

Vérifier alors que u_1, u_2, u_3, u_4 sont linéairement indépendants. On désignera par $\mathcal{E}_4$ le sous-espace de C^∞ engendré par (u_1, u_2, u_3, u_4) et l'on notera $\mathfrak{B}$ la base (u_1, u_2, u_3, u_4) de ce sous-espace.

d. Soient F et G les endomorphismes de $\mathcal{E}_4$ définis par :

$$F(y) = y'' + 8y \; ; \quad G(y) = y'' + 4y.$$

Calculer les images par F et G des éléments u_1, u_2, u_3, u_4 de $\mathcal{E}_4$. Écrire les matrices M_F et M_G définissant F et G dans la base $\mathfrak{B}$. F et G sont-ils des automorphismes?

Vérifier que F admet pour valeurs propres distinctes $s_1 = -2\omega'$ et $s_2 = 2\omega$, et que les valeurs propres distinctes de G sont $-s_1$ et $-s_2$.

e. Calculer le produit $M_F . M_G$ et montrer que, quels que soient y_1 et y_2 appartenant à $\mathcal{E}_4$, on a $F(y_1) = 4y_2$ si et seulement si $G(y_2) = 4y_1$.

f. y_1 et y_2 ayant pour composantes respectives

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) \text{ et } (b_1, b_2, b_3, b_4) \text{ dans la base } \mathfrak{B},$$

à quelles conditions doivent satisfaire ces huit composantes pour que le couple (y_1, y_2) vérifie l'équation $F(y_1) = 4y_2$, ainsi que les conditions :

(1) : $\qquad y_1(0) = \sqrt{5} \; ; \quad y'_1(0) = 0 \; ; \quad y_2(0) = y'_2(0) = 0$?

Montrer alors qu'il existe un couple unique (y_1, y_2) de fonctions appartenant à $\mathcal{E}_4$, vérifiant les équations (E_1) et (E_2) ainsi que les conditions (1). Calculer $y_1(x)$ et $y_2(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

III

Soit f la fonction telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \cos(\sqrt{5} - 1)x - \cos(\sqrt{5} + 1)x.$$

a. Montrer que f peut s'exprimer sous la forme :

$$f(x) = 2g(x)\, g(x\sqrt{5})$$

où g est une fonction que l'on déterminera. En déduire que, dans le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé d'axes Ox, Oy, la courbe représentative du graphe de f est tangente à celles des fonctions $2g$ et $-2g$, en des points dont on précisera les abscisses respectives.

. . . / . . .

b. Étudier les variations sur $[0, \pi]$ de la fonction :

$$x \to \Phi(x) = \operatorname{tg}(x\sqrt{5}) + \sqrt{5}\operatorname{tg} x$$

En déduire que la dérivée f' de f s'annule en trois points a, b, c de $[0, \pi]$ $(a < b < c)$, et situer chacun de ces points dans un intervalle appartenant à la partition de $[0, \pi]$ déterminée par les points $\frac{k\pi}{2\sqrt{5}}$ $(k = 0, 1, 2, 3, 4)$ et par les points $\frac{k'\pi}{2}$, $(k' = 0, 1, 2)$.

c. k étant un entier relatif donné, soit y_k la fonction définie par

$$y_k(u) = \frac{180}{\sqrt{5}}\left[k - \frac{1}{\pi}\operatorname{Arctg}\left(\sqrt{5}\operatorname{tg}\frac{\pi}{180}u\right)\right].$$

Calculer sa dérivée $y_k'(u)$ en tout point u de son ensemble de définition.

d. Soit $\{u_n\}$ la suite de nombres réels définie par la donnée u_0 et la relation de récurrence : $u_{n+1} = y_k(u_n)$.

Calculer u_1 et u_2 dans les trois cas suivants :

$k = 1$ et $u_0 = 45$; $k = 1$ et $u_0 = 120$; $k = 2$ et $u_0 = 170$.

Montrer alors que l'équation $y_1(u) = u$ a une racine $\alpha \in [45, 60]$, une racine $\beta \in [110, 120]$ et que l'équation $y_2(u) = u$ a une racine $\gamma \in [170, 175]$. Donner pour α, β et γ l'encadrement permis par les calculs. Peut-on en déduire une valeur approchée des racines a, b, c de l'équation $f'(x) = 0$ sur $[0, \pi]$?

e. Étudier les variations de f sur $[0, \pi]$. Tracer avec soin la courbe représentative de son graphe ainsi que celles des fonctions $2g$ et $-2g$. On prendra comme unité de longueur $\frac{9}{\pi}$ cm sur l'axe des abscisses et 3 cm sur l'axe des ordonnées.

IV

Soit F la fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$ par $F(\theta) = \cos\theta - \cos\alpha\theta$ où α est un nombre *irrationnel* positif donné.

a. Calculer, pour tout $T \in \mathbb{R}$, $F(\theta + T) - F(\theta)$, et montrer que F n'est pas périodique (on pourra s'inspirer des résultats du II. *c*).

b. Démontrer la proposition suivante :

$\forall k \in \mathbb{Z}$ et $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $|F(\theta + 2k\pi) - F(\theta)| \leqslant 2|\sin k\alpha\pi|$.

c. On admettra que, quel que soit $\varepsilon > 0$ donné, il existe un couple (k, n) d'entiers naturels vérifiant l'inégalité $2\pi|k\alpha - n| \leqslant \varepsilon$; montrer alors que k vérifie la proposition suivante :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad |F(\theta + 2k\pi) - F(\theta)| \leqslant \varepsilon.$$

d. On pose $|k\alpha - n| = d$, et l'on désigne par p le plus petit entier $\geqslant \frac{1}{d}$. Démontrer qu'aussi bien dans l'hypothèse où $k\alpha > n$ que dans le cas où $k\alpha < n$, on a :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad |F(\theta + 2pk\pi) - F(\theta)| \leqslant \varepsilon.$$

e. Démontrer de même que, m désignant un entier naturel différent de 0, et p_m le plus petit entier supérieur ou égal à $\frac{m}{d}$ on a :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad |F(\theta + 2p_m k\pi) - F(\theta)| \leqslant \varepsilon.$$

f. Trouver un majorant de $p_{m+1} - p_m$ indépendant de m. Utilisant l'inégalité :

$$|p_{m+1} - p_m - 1| < \frac{1}{d},$$

démontrer qu'il existe un nombre $l_\varepsilon > 0$ tel que tout intervalle de $\mathbb{R}$ de longueur l_ε contienne au moins un nombre T tel que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad |F(\theta + T) - F(\theta)| \leqslant \varepsilon.$$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail